第10章
系列相関

藪友良

『入門　実践する計量経済学』

(東洋経済新報社)

PPT

- 基本概念
- 不偏性と一致性
- 頑健な分散の推定
- コクラン=オーカット法
- どの推定法を用いるべきか

基本概念

・**系列相関**

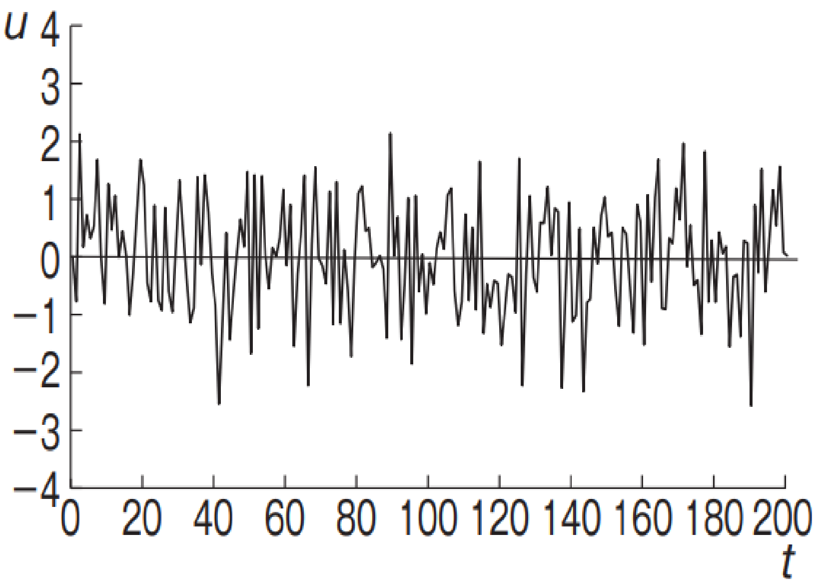
$$Cov(u_t, u_s) = E[u_t u_s] \neq 0$$

---**自己共分散**は0ではなく、誤差項同士に相関あり

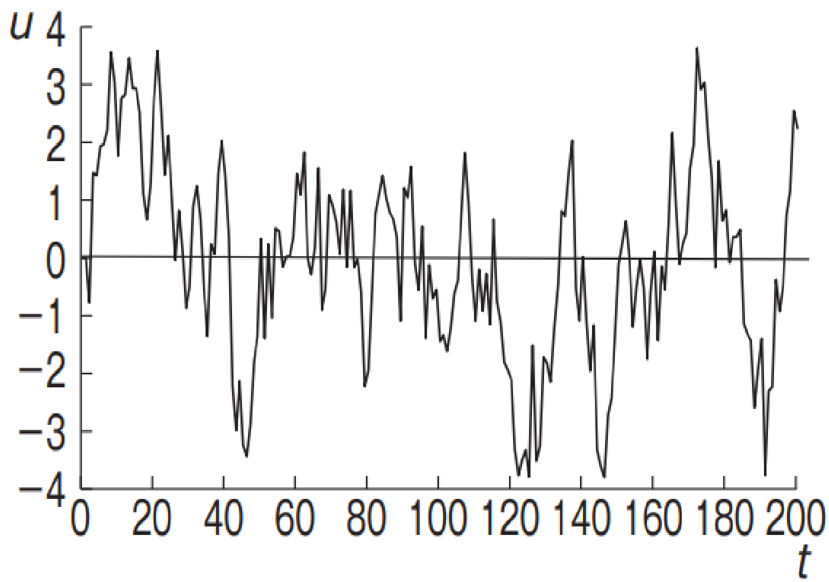
(標準的仮定5が満たされない)

図10 - 1　誤差項の動き

(a) 系列相関がないケース



(b) 正の系列相関があるケース



・ **確率変数v_tは定常**

$$\mathrm{E}[v_t] = \mu$$
$$\mathrm{E}[(v_t - \mu)(v_{t-s} - \mu)] = E[(v_{t-j} - \mu)(v_{t-j-s} - \mu)] = \gamma_s$$

--- 期待値は時間を通じて一定となる

---自己共分散は時差(2時点の差)であるsだけに依存する

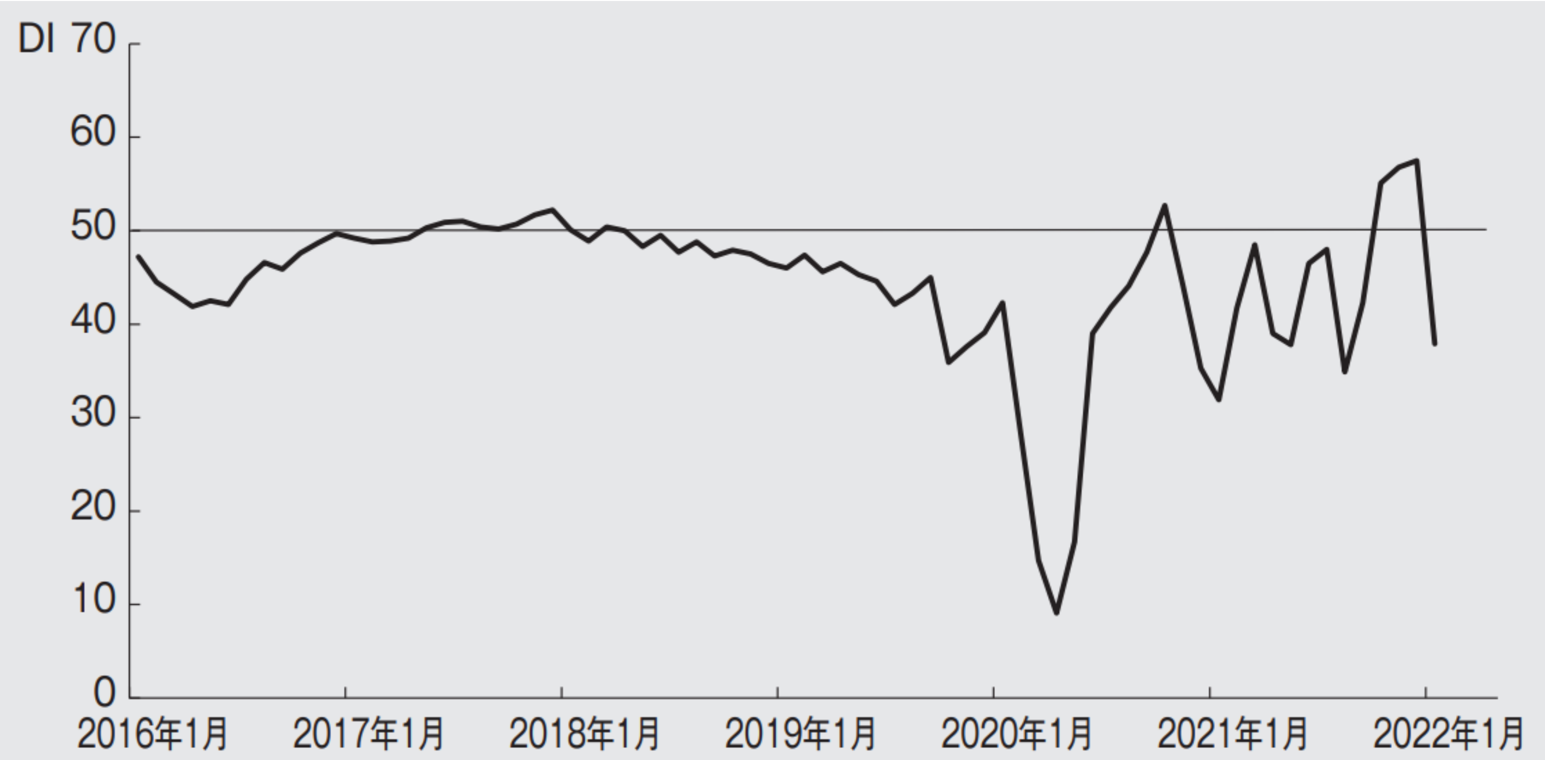
--- $s = 0$なら、$E[(v_t - \mu)^2] = \gamma_0$である
（つまり、分散も時間を通じて一定となる）

・景気ウォッチャー調査の現況判断DI

--- 速報性の高い調査

--- 50を上回ると景気がよいと判断している人が多い

図10 - 2　現状判断 DI



不偏性と一致性

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})u_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$$

- **仮定5に関係なく、OLS推定量は不偏性を満たす**

$$E\left[\hat{\beta}\right] = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})E[u_t]}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} = \beta$$

- **系列相関があるとき、分散は**

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2 = T\frac{\gamma_0 + 2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1 - \frac{s}{T}\right)\gamma_s}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2\right\}^2}$$

--- $v_t = (X_t - \bar{X})u_t$、$\gamma_s = E[v_t v_{t-s}]$

--- サンプルサイズが大きくなると $\sigma_{\hat{\beta}}^2$ は0となる

(練習問題8参照)

$$\frac{\frac{1}{T}\left\{\gamma_0 + 2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1 - \frac{s}{T}\right)\gamma_s\right\}}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2 / T\right\}^2}$$

--- OLS推定量は**一致性**も満たす

頑健な分散の推定

- $\hat{\beta}$の確率的表現

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})u_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$$

- **系列相関がないもとで**

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$$

- **系列相関があるもとで**

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2 = T\,\frac{\gamma_0 + 2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1 - \frac{s}{T}\right)\gamma_s}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2\right\}^2}$$

---ここで $v_t = (X_t - \bar{X})u_t$、$\gamma_s = E[v_t v_{t-s}]$

証明

- $v_t = (X_t - \bar{X})u_t$とする。このとき、

$$E[v_t] = \left(X_t - \bar{X}\right)E[u_t] = 0$$

また、定常性を仮定する

$$E[v_t v_{t-s}] = E[v_{t-j} v_{t-j-s}] = \gamma_s$$

- $\hat{\beta}$の確率的表現($\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})u_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$)は

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{T} v_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{\beta}}^2 = E\left[\left(\hat{\beta} - \beta\right)^2\right] = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\sum_{t=1}^{T} v_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{E\left[\left(\sum_{t=1}^{T} v_t\right)^2\right]}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2\right\}^2}$$

$$= T\,\frac{\gamma_0 + 2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1 - \frac{s}{T}\right)\gamma_s}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2\right\}^2}$$

$$E\left[\left(\sum_{t=1}^{T} v_t\right)^2\right] = E[(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_T)(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_T)]$$

$$= E\begin{bmatrix} v_1^2 + v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_1 v_4 + \cdots + v_1 v_T + \\ v_2 v_1 + v_2^2 + v_2 v_3 + v_2 v_4 + \cdots + v_2 v_T + \\ v_3 v_1 + v_3 v_2 + v_3^2 + v_3 v_4 + \cdots + v_3 v_T + \\ \ldots \\ v_T v_1 + v_T v_2 + v_T v_3 + v_T v_4 + \cdots + v_T^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E[v_1^2] + E[v_1 v_2] + E[v_1 v_3] + E[v_1 v_4] + \ldots + E[v_1 v_T] + \\ E[v_1 v_2] + E[v_2^2] + E[v_2 v_3] + E[v_2 v_4] + \ldots + E[v_2 v_T] + \\ E[v_1 v_3] + E[v_2 v_3] + E[v_3^2] + E[v_3 v_4] + \ldots + E[v_3 v_T] + \\ \ldots \\ E[v_1 v_T] + E[v_2 v_T] + E[v_3 v_T] + E[v_4 v_T] + \ldots + E[v_T^2] \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &E[v_t v_{t-s}] \\ &= E[v_{t-j} v_{t-j-s}] = \gamma_s \end{aligned}}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_{T-1} + \\ \gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{T-2} + \\ \gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{T-3} + \\ \ldots \\ \gamma_{T-1} + \gamma_{T-2} + \gamma_{T-3} + \gamma_{T-4} + \ldots + \gamma_0 \end{bmatrix}$$

$$= T\gamma_0 + 2(T-1)\gamma_1 + 2(T-2)\gamma_2 + 2(T-3)\gamma_3 + \cdots + 2(T-(T-1))\gamma_{T-1}$$

$$= T\left\{\gamma_0 + 2\left(1 - \frac{1}{T}\right)\gamma_1 + 2\left(1 - \frac{2}{T}\right)\gamma_2 + 2\left(1 - \frac{3}{T}\right)\gamma_3 + \cdots + 2\left(1 - \frac{T-1}{T}\right)\gamma_{T-1}\right\}$$

$$= T\left\{\gamma_0 + 2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1 - \frac{s}{T}\right)\gamma_s\right\}$$

$\sigma_{\hat{\beta}}^2 = T\frac{\gamma_0 + 2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1-\frac{s}{T}\right)\gamma_s}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\right\}^2}$の推定

- モデル$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$をOLS推定し、残差$\hat{u}_t$から $\hat{v}_t = (X_t - \bar{X})\hat{u}_t$を求め、$\gamma_s = E[v_t v_{t-s}]$を推定する

$$\widehat{\gamma_s} = \frac{1}{T}\sum_{t=s+1}^{T}\hat{v}_t\hat{v}_{t-s}$$

- $\hat{\beta}$の分散の推定量は

$$s_{\hat{\beta}}^2 = T\frac{\widehat{\gamma_0} + 2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1-\frac{s}{T}\right)\widehat{\gamma_s}}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\right\}^2}$$

--- 平方根は、**不均一分散と自己相関に頑健な(**HAC)標準誤差

--- 不均一分散にも頑健。もし$\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_{T-1} = 0$なら その平方根は**ホワイト標準誤差**になる

$$s_{\hat{\beta}}^2 = T\frac{\widehat{\gamma_0}}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\right\}^2} = T\frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{v}_t^2}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\right\}^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\hat{u}_t^2}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\right\}^2}$$

$s_{\hat{\beta}}^2 = T\frac{\widehat{\gamma_0}+2\sum_{s=1}^{T-1}\left(1-\frac{s}{T}\right)\widehat{\gamma_s}}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\right\}^2}$の問題

- 時差sが大きくなると、$\widehat{\gamma_s}$の推定精度は下がる

$$\widehat{\gamma_1} = \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\hat{v}_t\hat{v}_{t-1}、\cdots$$

$$\hat{\gamma}_{m-1} = \frac{1}{T}\sum_{t=m}^{T}\hat{v}_t\hat{v}_{t-m+1}、\cdots$$

$$\hat{\gamma}_{T-1} = \frac{1}{T}\hat{v}_T\hat{v}_1$$

---時差sが大きいとき、$\widehat{\gamma_s}$は無視したほうがよい

---そもそも時差が大きいと自己共分散は0に近い値となる

- $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_{m-1}$までを考慮して($m$:バンド幅)、分散を推定すればよい

$$s_{\hat{\beta}}^2 = T \frac{\widehat{\gamma_0} + 2\sum_{s=1}^{m-1}\left(1 - \frac{s}{m}\right)\widehat{\gamma_s}}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2\right\}^2}$$

--- HAC推定量の1つでニューウィー=ウェスト推定量と呼ばれる

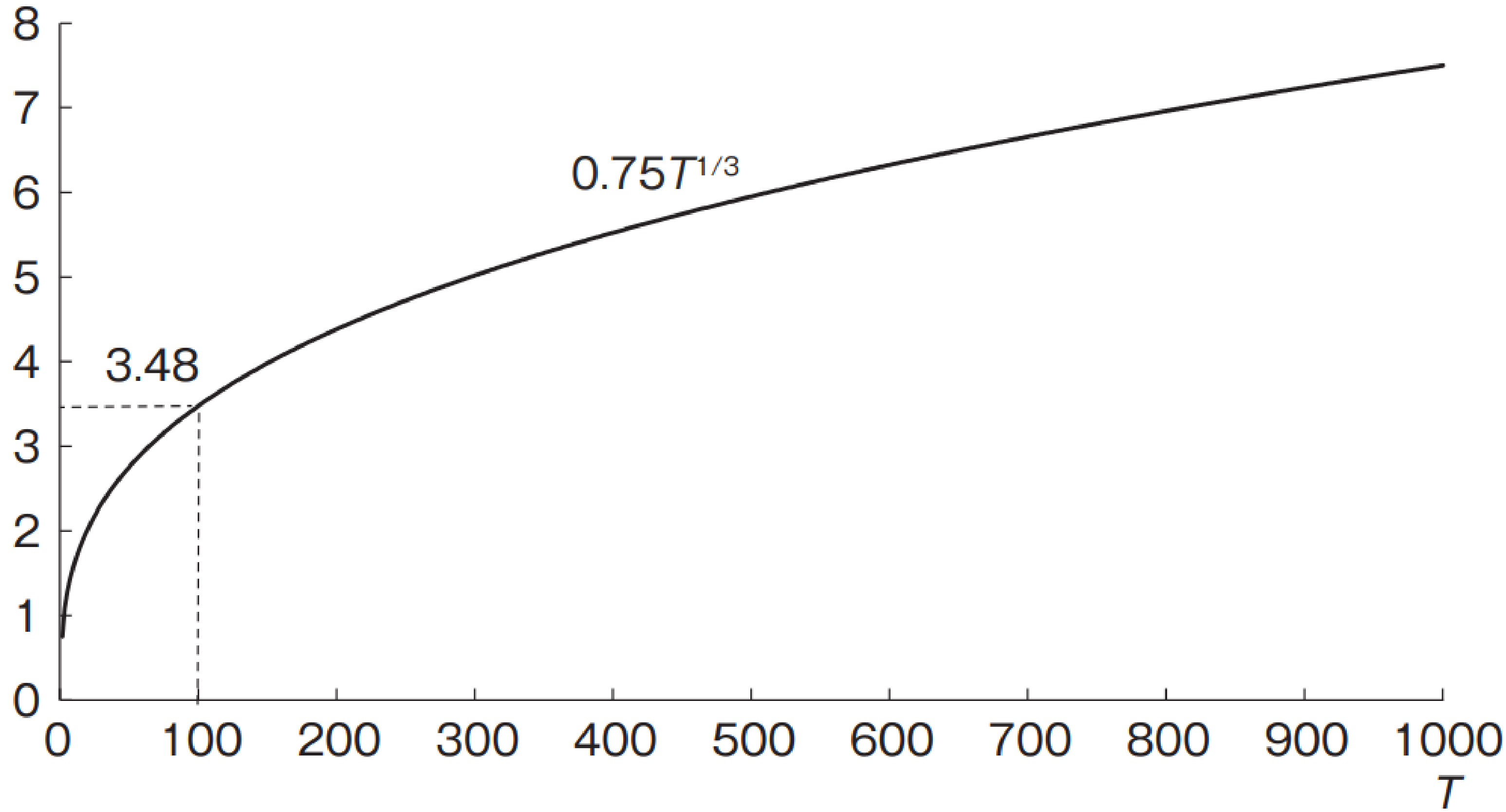
--- バンド幅(m)は、2条件を満たすように決める

①サンプルサイズTが大きくなるとバンド幅mも大きくなる
②バンド幅mはサンプルサイズTに比べて極めて小さい

(例)

$$m = 0.75T^{1/3}$$

図10 - 3　T と$0.75T^{1/3}$との関係



$s_{\hat{\beta}}^2 = T\frac{\left\{\widehat{\gamma_0}+2\sum_{s=1}^{m-1}\left(1-\frac{s}{m}\right)\widehat{\gamma_s}\right\}}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2\right\}^2}$の具体例

・ $T = 100$ならば、

$$0.75 \times 100^{1/3} = 3.48$$

となるため、最も近い整数$m = 3$を用いる

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{100\frac{\hat{\gamma}_0 + 2\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)\hat{\gamma}_1 + \left(1-\frac{2}{3}\right)\hat{\gamma}_2\right)}{\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2\}^2}}$$

$$= \sqrt{100\frac{\hat{\gamma}_0 + \frac{4}{3}\hat{\gamma}_1 + \frac{2}{3}\hat{\gamma}_2}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2\right\}^2}}$$

例）ガソリン小売価格

- Oil_t : 世界市場での原油価格の対数
- $Price_t$:ガソリン価格の対数
- $Y_t = Price_t - Price_{t-1}$、$X_t = Oil_t - Oil_{t-1}$
- 2000年1月から2017年12月までのデータを用いると

$$\hat{Y} = 0.060 + 0.132X_t + 0.191X_{t-1} + 0.049X_{t-2}$$

ロバスト標準誤差	(0.117)	(0.016)	(0.016)	(0.013)
HAC標準誤差	(0.098)	(0.024)	(0.018)	(0.014)

- 残差$\hat{u}_t$に系列相関があるなら、$\hat{v}_t = (X_t - \bar{X})\hat{u}_t$にも系列相関がある

- 残差には正の系列相関があるため、HAC標準誤差は大きくなる

$$s_{\hat{\beta}}^2 = T \frac{\widehat{\gamma_0} + 2\sum_{s=1}^{m-1}\left(1 - \frac{s}{m}\right)\widehat{\gamma_s}}{\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2\right\}^2}$$

図10 - 4　残差の推移

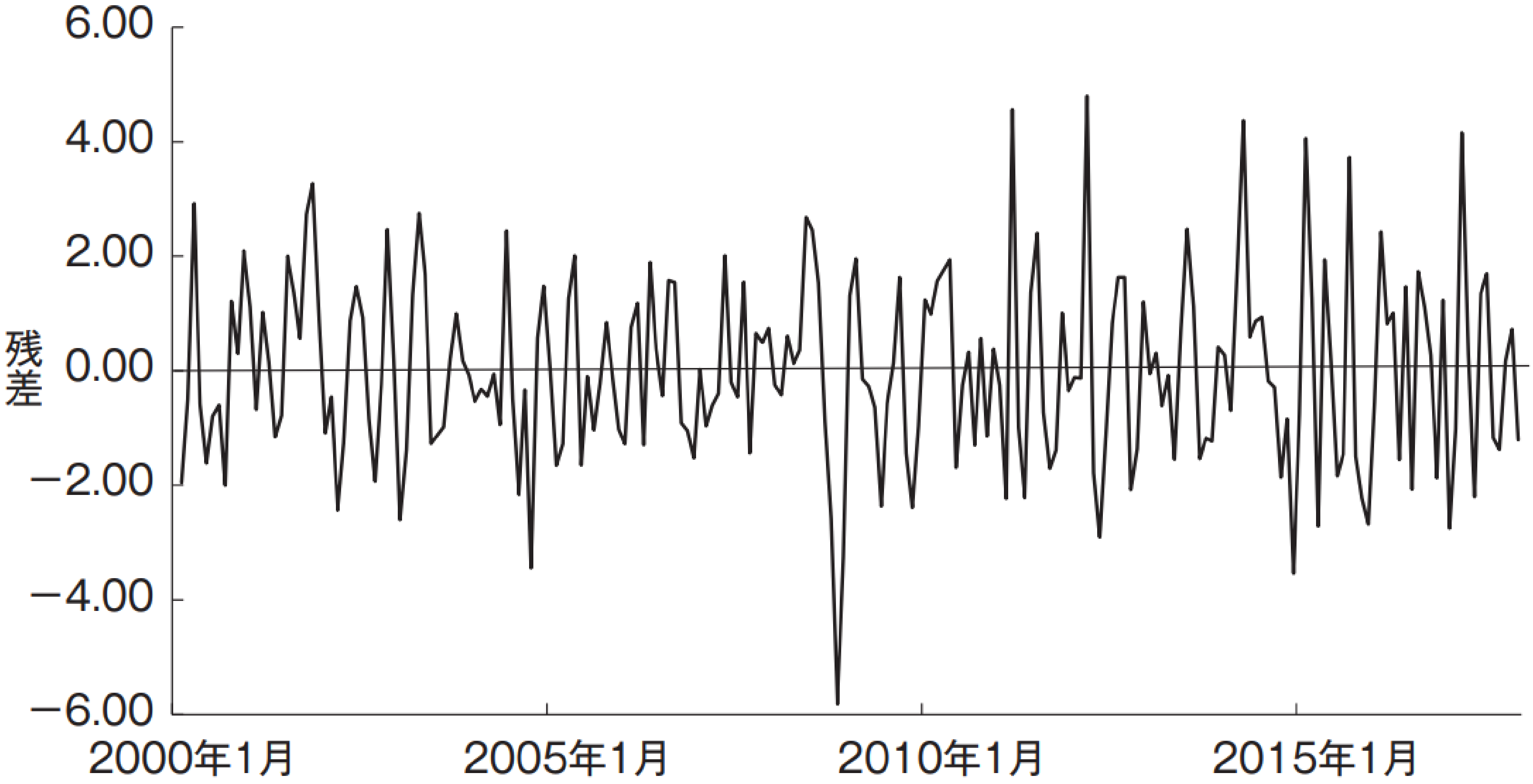
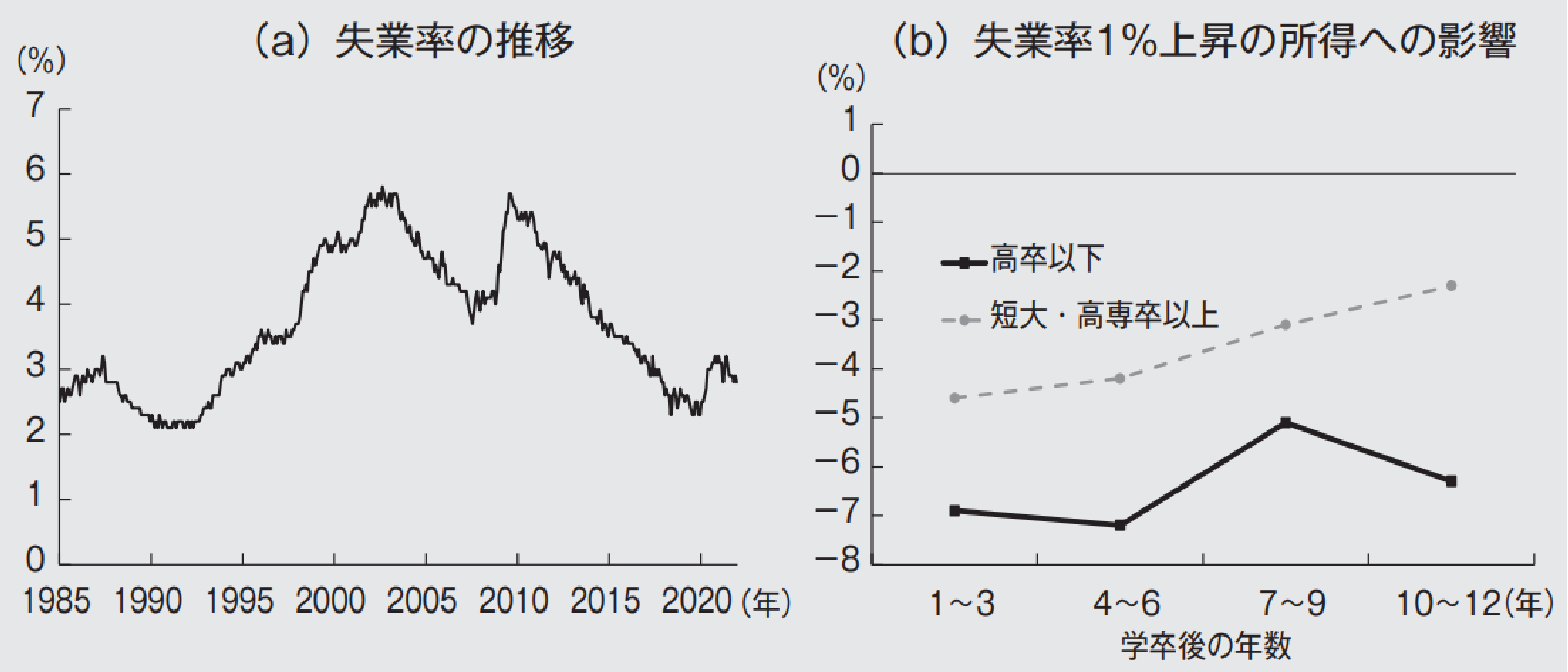

6.00
4.00
2.00
0.00
−2.00
−4.00
−6.00
残差
2000年1月
2005年1月
2010年1月
2015年1月

図10 - 5　失業率と所得

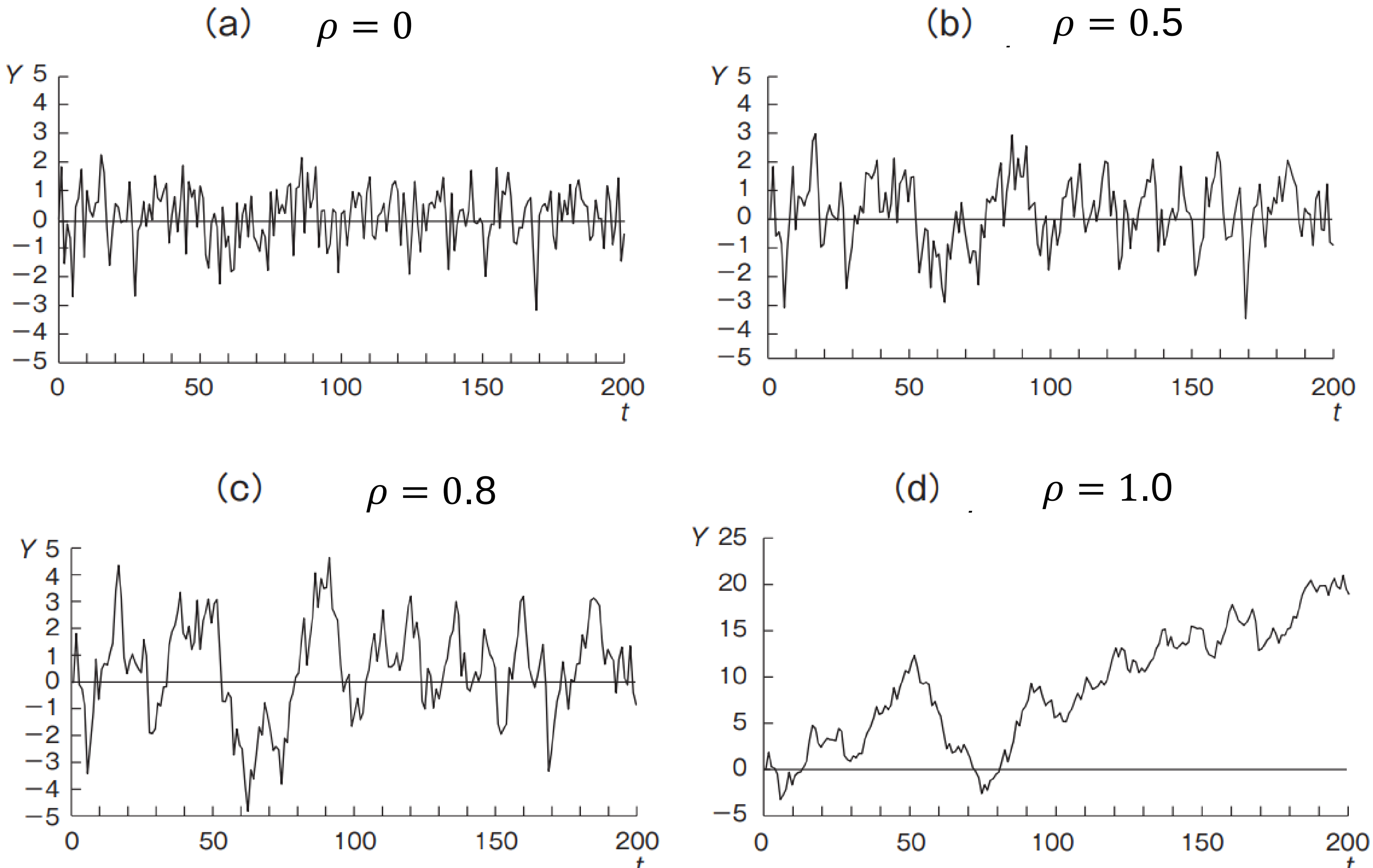


（出所）（a）は筆者作成.（b）は，太田聰一・玄田有史・近藤絢子（2007）「溶けない氷河—世代効果の展望」『日本労働研究雑誌』569号，4-16の図 1 をもとに作図しました.

コクラン=オーカット法

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

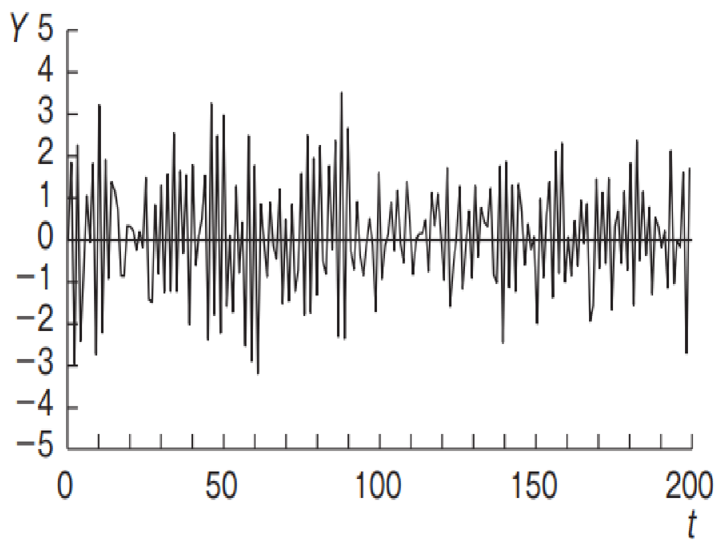
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t、\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$



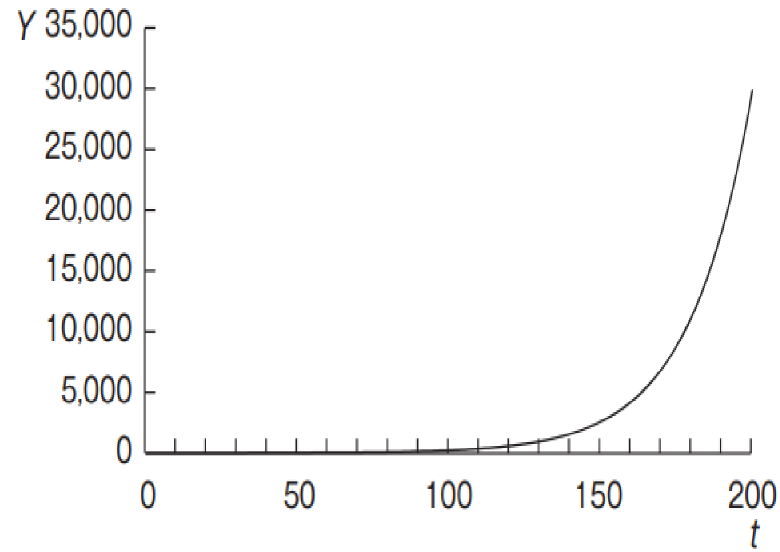
$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \text{、} \varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$

(e) $\rho = -0.8$



(f) $\rho = 1.05$



$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t、\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$$

- 誤差項が標準的仮定をみたすように、元の式を変形してから OLS推定する(**一般化最小2乗法、GLS**)

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1} + u_{t-1}$$

- ρの値がわかっているなら、

$$\boxed{Y_t - \rho Y_{t-1}} = (\alpha + \beta X_t + u_t) - \rho(\alpha + \beta X_{t-1} + u_{t-1})$$
$$= \alpha\boxed{(1-\rho)} + \beta\boxed{(X_t - \rho X_{t-1})} + \boxed{(u_t - \rho u_{t-1})}$$

このとき、$u_t - \rho u_{t-1} = \varepsilon_t$であり標準的仮定を満たす

- 被説明変数を$Y_t - \rho Y_{t-1}$、説明変数を$1-\rho$、$X_t - \rho X_{t-1}$としたOLS推定はBLUEとなる

--- 実際には、ρの値はわからないため、データから ρの値を推定する必要がある

コクラン=オーカット法の手順

①モデル$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$をOLS推定し、残差$\widehat{u_t} = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t$を求める

②誤差項には$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$という関係があるため、被説明変数$\hat{u}_t$、説明変数$\hat{u}_{t-1}$としてOLS推定することで$\hat{\rho}$を求める

③モデルを以下として変形する

$$\boxed{Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}} = \alpha \boxed{(1 - \hat{\rho})} + \beta \boxed{(X_t - \hat{\rho} X_{t-1})} + \boxed{(u_t - \hat{\rho} u_{t-1})}$$

被説明変数$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$、説明変数$1 - \hat{\rho}$、$X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$としOLS推定する

--- 実行可能な一般化最小2乗法(FGLS)

例）ガソリン小売価格

- Oil_t : 世界市場での原油価格の対数
- $Price_t$:ガソリン価格の対数
- $Y_t = Price_t - Price_{t-1}$、$X_t = Oil_t - Oil_{t-1}$
- 1987年6月から2017年12月までのデータを用いると

OLS $\hat{Y} = 0.060 + 0.132X_t + 0.191X_{t-1} + 0.049X_{t-2}$

HAC標準誤差 (0.098) (0.024) (0.018) (0.014)

FGLS($\hat{\rho} = 0.122$) $\hat{Y} = 0.063 + 0.128X_t + 0.192X_{t-1} + 0.047X_{t-2}$

(0.128) (0.012) (0.012) (0.012)

・コクラン=オーカット法の問題

分析者は誤差項のモデルを知らなければならない。さまざまな可能性があり、モデルを知ることは容易ではない

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

--- 誤ったモデルを使うと、系列相関が残る可能性あり

どの推定法を用いるべきか

系列相関なし

OLS推定(BLUE)

系列相関あり

誤差の構造を知らない

OLS推定（BLUEではない、HAC標準誤差)

誤差の構造を知っている
($u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$)

コクラン=オーカット推定
（BLUE、通常の標準誤差
もしくはHAC標準誤差)

まとめ

- **基本概念**

  --- 系列相関、定常性

- **不偏性と一致性**

  --- 系列相関があっても、OLS推定量は不偏性と一致性を満たす良い推定量

- **頑健な分散の推定**

  --- 系列相関があれば、HAC標準誤差を用いる

- **コクラン=オーカット法**

  --- OLS推定よりも効率的な方法