練習問題–母平均と母分散の区間推定

新保一成*

2011 年 10 月 22 日

1 問題

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から無作為に抽出された大きさ $n = 10$ の標本について，標本平均 $\bar{x} = 41.5$，標本分散 $s^2 = 1104.7$(標本標準偏差 $s = 33.2$ とする) であった。

問題 1 母分散の 95% 信頼区間を設定せよ。

問題 2 母平均の 95% 信頼区間を

1. 小標本として
2. 大標本として

設定せよ。

2 解答例

2.1 問題 1

$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ は，自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う。図 1 は，自由度 9 の χ^2 分布の密度関数である。図中，$\chi^2_{0.975}$ と $\chi^2_{0.025}$ は，それぞれ自由度 9 の χ^2 分布の 97.5% 点と 2.5% 点で次の性質を満たす点である。

$$\Pr\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \chi^2_{0.975}\right) = 0.975 \tag{1}$$

$$\Pr\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \chi^2_{0.025}\right) = 0.025 \tag{2}$$

したがって，図のグレーの部分の確率は次のように表すことができる。

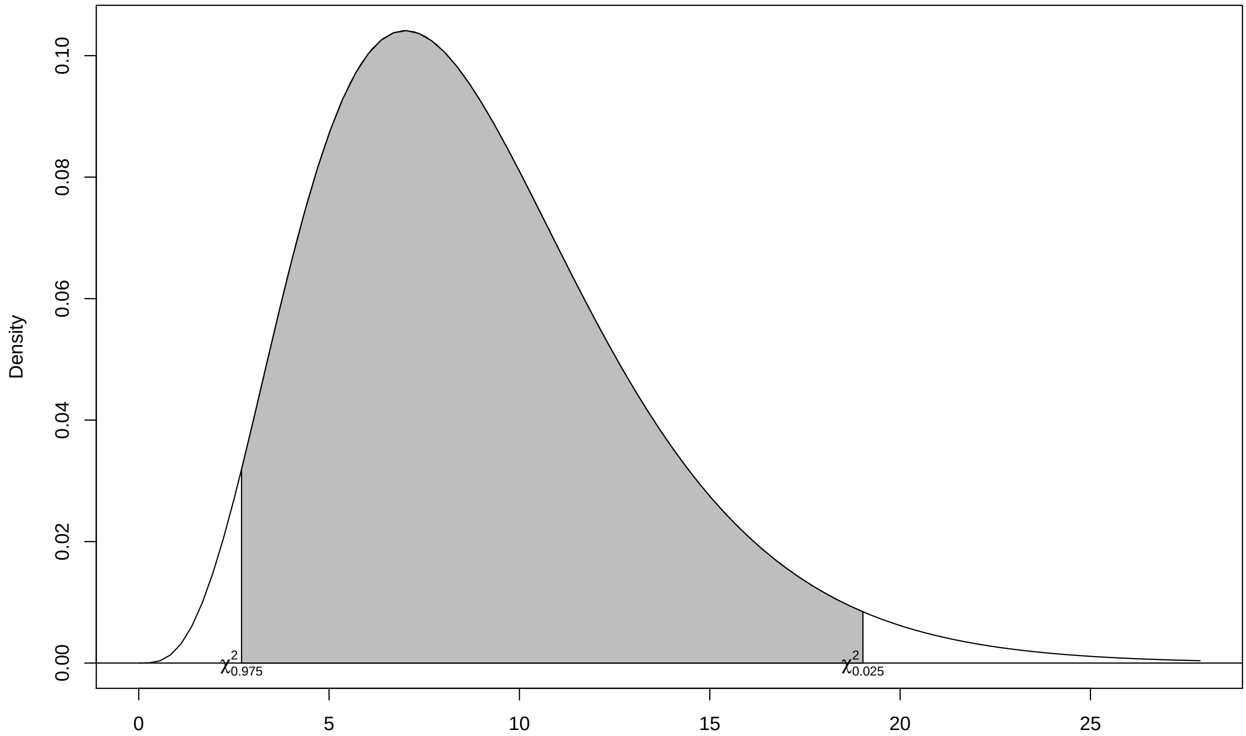
$$\Pr\left(\chi^2_{0.975} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{0.025}\right) = 0.95 \tag{3}$$

カッコ内の不等式を σ^2 について解けば，

$$\Pr\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}}\right) = 0.95 \tag{4}$$

* 慶應義塾大学商学部、〒108-8345 東京都港区三田 2-15-45、電子メール: `shimpo@fbc.keio.ac.jp`

図 1　自由度 9 の χ^2 分布の密度関数



となる。χ^2 分布表より，

$$\chi^2_{0.975} = 2.70039 \tag{5}$$
$$\chi^2_{0.025} = 19.0228 \tag{6}$$

であるから，σ^2 の信頼係数 0.95 の信頼区間は次のようになる。

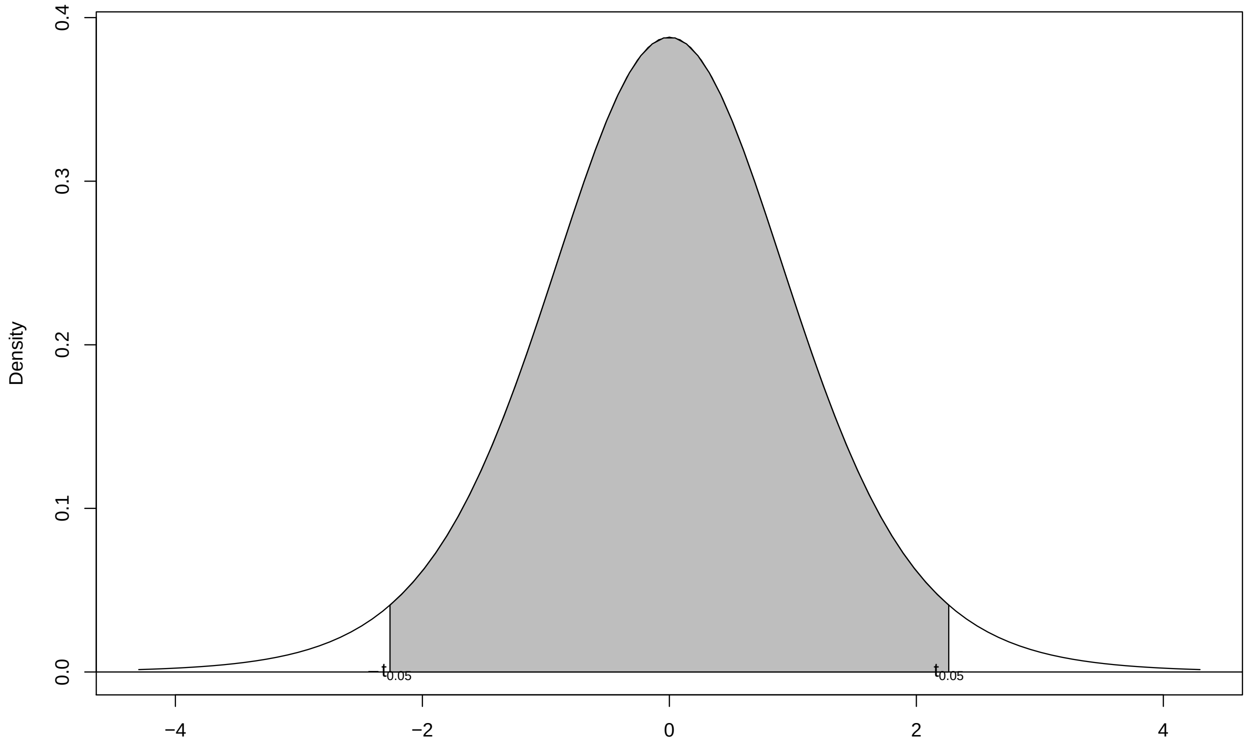
$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}}\right] = \left[\frac{9 \times 1104.7}{19.0228}, \frac{9 \times 1104.7}{2.70039}\right] = [522.6518, 3681.802] \tag{7}$$

2.2　問題 2(a)

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ は，自由度 $n-1$ の t 分布に従う。図 2 は，自由度 9 の t 分布の密度関数である。図中，$t_{0.05}$ は，それぞれ自由度 9 の t 分布の 5% 点で，図のグレーの部分の確率は次のように表すことができる。

$$\Pr\left(-t_{0.05} < \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{0.05}\right) = 0.95 \tag{8}$$

図 2　自由度 9 の t 分布の密度関数



カッコ内の不等式を μ について解けば,

$$\Pr\left(\bar{X} - t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \tag{9}$$

となる。t 分布表より,

$$t_{0.05} = 2.262 \tag{10}$$

であるから，μ の信頼係数 0.95 の信頼区間は次のようになる。

$$\left[\bar{x} - t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[41.5 - 2.262 \times \frac{33.2}{\sqrt{10}}, 41.5 + 2.262 \times \frac{33.2}{\sqrt{10}}\right] = [17.7518, 65.2482] \tag{11}$$

2.3 問題 2(b)

スチューデントの t 分布は，自由度が大きくなるにしたがって標準正規分布 $N(0,1)$ に近づくので，$t_{0.05}$ を標準正規分布の 5% 点 ($z_{0.05}$) で置き換えればよい。すなわち，

$$\Pr\left(\bar{X} - z_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \tag{12}$$

$z_{0.05} = 1.96$ であるから，大標本の場合の μ の信頼区間は，次のように求めることができる。

$$\left[\bar{x} - z_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[41.5 - 1.96 \times \frac{33.2}{\sqrt{10}}, 41.5 + 1.96 \times \frac{33.2}{\sqrt{10}}\right] = [20.92243, 62.07757] \tag{13}$$