4 接平面

1 変数関数のグラフの接線に相当する 2 変数関数のグラフの接平面の概念を学ぶ．まず, 1 変数関数のグラフの接線の方程式について復習しよう．接線は直線なのでまず直線の方程式について思い出しておくと, y 軸に平行でないかぎり,

$$y = mx + n$$

の形の式で直線を表すことができる．この形の関数は 1 次関数とよばれた．また, m をこの直線の傾きとよんだ．この傾き m はこの 1 次関数を微分してみればわかるように, どの x の値において考えてもそこにおける微分係数に等しい．したがって, 1 次関数にはそのあらゆる点で共通である微分係数がその式に陽に表れておりそれは傾きであることに注意しよう．このことから当然なのだが, 1 次関数のグラフについては, その上のいかなる点における接線の方程式もその 1 次関数に等しいことになる．そして, 1 次関数とはかぎらない一般の 1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフの上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式はその点 $(a, f(a))$ を通る, 傾きが $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい直線の方程式であった．これは $(a, f(a))$ を中心に考えると, $y = f(x)$ とその接線の方程式の微分係数を等しくすることにより, 接していることを表現しているからである．

このことを頭において, 2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフの接線に相当するものを考えていこう．2 変数関数のグラフは空間内の曲面を描く．問題にするグラフは曲面であるため, それに接する平面を考えこれを接平面という．空間内の z 軸に平行ではない平面の方程式は一般に

$$z = mx + ny + l$$

と表現できる．この形の関数を 2 変数の 1 次関数とよぶ．この 2 変数関数の $(x, y) = (a, b)$ における偏微分係数 $f_x(a, b)$ と $f_y(a, b)$ を求めてみると, (a, b) の値にかかわらず常に $f_x(a, b) = m$，$f_y(a, b) = n$ が成立している．これは直線の方程式である 1 変数の 1 次関数の傾きと同じ状況となっていることに気がつくだろうか．微分係数の第 1 成分は x の変化分の何倍が z の変化分と

なってあらわれるかを示す倍率，すなわち x 軸方向の平面の傾き，を, 第 2 成分は y の変化分の何倍が z の変化分となってあらわれるかを示す倍率，すなわち y 軸方向の平面の傾き，を表しているのである．1 次関数の場合その合計がぴったり z の変化分となるのである．

以上の考察を前提に 2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフの点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式を求めてみよう．求めようとしている接平面の方程式は

$$z = mx + ny + l$$

という形をしているはずである．$z = f(x, y)$ のグラフの点 $(a, b, f(a, b))$ における x 軸方向の傾きは $f_x(a, b)$ であったので，これは接平面の x 軸方向の傾きの m と等しいはずである．同様に，n は $f_y(a, b)$ に等しい．従って，上式は

$$z = f_x(a, b)x + f_y(a, b)y + l$$

と書けることになる．残りは l の値を確定するだけであるが，この接平面は $(a, b, f(a, b))$ を通るので,

$$f(a, b) = f_x(a, b)a + f_y(a, b)b + l$$

が成立しているはずである．従って,

$$l = f(a, b) - f_x(a, b)a - f_y(a, b)b$$

となっているはずである．これより，求める接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)x + f_y(a, b)y + f(a, b) - f_x(a, b)a - f_y(a, b)b$$

である．このままでもよいが，もう少し整理して,

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

あるいは

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

となる．

接平面の特徴は点 (a,b) の近くでは，元の関数のグラフと接平面はほどんど同じとみてよいということであった．従って，x が $a+\Delta x$，y が $b+\Delta y$ という値を取った時の元の関数の値 $f(x,y)$ の値はほぼ (x,y) における接平面の方程式の z の値

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)$$

に等しいことになる．即ち，

$$f(x,y)\approx f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)$$

が成立する．ここで，$x=a+\Delta x$，$y=b+\Delta y$ とおくと，

$$f(x,y)\approx f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y+f(a,b)$$

が成立するが，$f(a,b)$ を移行して，

$$f(x,y)-f(a,b)\approx f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y$$

が成立することになる．ここで，左辺は関数 $z=f(x,y)$ の従属変数 z の変化分 Δz そのものなので

$$\Delta z\approx f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y$$

が常に成立していることになる．これは前回学んだ微分式に他ならないことに注意しよう．

演習 3

1. 関数 $z=\log\sqrt{1+x^2+y^2}$ で表される曲面の $(x,y)=(1,2)$, $(x,y)=(0,0)$, $(x,y)=(0,1)$ における接平面の方程式をそれぞれ求めなさい．

$$z=\tfrac{1}{6}x+\tfrac{1}{3}y-\tfrac{5}{6}+\log\sqrt{6}$$
$$z=0$$
$$z=\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}+\log\sqrt{2}$$

2. x 軸方向の傾きが 2 で y 軸方向の傾きが 3 である $(1,2,3)$ を通る平面の方程式を求めなさい.

$$z = 2x + 3y - 5$$

3. 一般に, x 軸方向の傾きが m で y 軸方向の傾きが n である (x_0, y_0, z_0) を通る平面の方程式を求めなさい.

$$z = m(x - x_0) + n(y - y_0) + z_0$$

4. $z = x^2 + y^2$ の $(1,2,5)$ における接平面の方程式を求めなさい.

$$z = 2x + 4y - 5$$

5. 曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ の $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ における接平面の方程式を求めなさい.

$$x + y + z = \sqrt{3}$$

6. 一般に, 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(a, b, f(a,b))$ における接平面の方程式を求めなさい.

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

7. 曲面 $z = e^{xy^2}$ の点 $(2, 1, e^2)$ における接平面の方程式を求めなさい.

$$z = e^2 x + 4e^2 y - 5e^2$$